131. 力ノ平行四辺形則ニツイテ

（阪大）石原 忠重（1948. 11. 23）

コノ小論ノ内容ハ物理学的ニハ力ノ平行四辺形則ヲヤヤ一般ニ 即チ通常経験律トシテ認容サレテヰル諸仮定ヲカナリユルクシテ導ク試ミデアリ. 数学的ニハ E^2 Space ノ Euclid. metrik ニ従フ Vector Space ガ別ノ意味デノ結合ニ関シテモ Vector Space ヲ作ッテ居ル時コノ両者ノ関係, ソノ一致ノ為ノ条件ヲ求メテ見ル事デアル.（註1）（註2）

E^2 ノ原点カラノ任意ノ Vektor ヲ力トシ, 合力ヲ作ル（⊕）トイフ加法ト実数トノ作用（（∘）デ表ハス）トデ Vektor Raum ヲ作ルトスル. E^2 ノ metrik ニ従フ Vektor ノ加法ヲ（+） 実数倍ヲ（　）デ表ハス.

公理 (1)−(3) ハ ⊕ modul　(4)−(7) ハ ○ ノ作用素トシテノ axiom（$1\circ\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$ ハ仮定シテ居ナイ）デアル

Operator（・）ト（+）加法ニツイテハ, 改メテ書ク事ハシナカッタ.

Axiom (3) ハ + 及 ⊕ 両 Modul ノ nullelement ノ一致ノ仮定 (9) ハ $\{\lambda^{\circ}\mathfrak{a} \mid \lambda \in \mathrm{Real}\}$ ノ集合ノ直線性ノ結果ヲ得ルニ主要ナ axiom デアリ (10) ハ Operator ∘ ノ有界性デ $\lambda^{\circ}\mathfrak{a}$ ノ λ ニ対スル連続性ヲ導ク. 公理 (11) ハ次元ニ関スルノアル公理デアリ. (12) ハ Symmetry ナ vector ノ合力ニ対

註1. E. Mach ハソノ「力学ノ発達トソノ歴史的批判的考察」ニ於テ Principia ニオケル諸定義乃至法則経験律ヲ批判シ吟味シテ居ルガ, ソノ中デ「[illegible] ノ物体 A.B.C ガ物体 K ニ及ボス加速度ハ互ニ無関係デアル」（力ノ合成法則ハ之ヨリ直ニ導カレル.）ト述ベテ居ル. 同様ノ論議ガ外ニモ見出サレルガ Mach ノ云フ互ニ無関係トハドウイフ事デアロウカ? トニカク「力」ノ線型結合性ノミカラデハ平行四辺形則ハ出テ来ナイ. 本論末尾ノ反例ニソレハ明デアル.

註2. 数学的ナ作用ノ意味デハモット一般ナ仮定ガ色々考ヘラレルデアロウ.（次元, metrik, Operator bereich 等）

調線上ニ来ルトイフ仮定デアル．最初(1)−(7)マデノ仮定カラ得ラレル結果ヲ列記シ、次イデ(8)，(9)，(10)ヲ加ヘタ．之デ可成ノ結果ガ得ラレルガ未ダ不充分ナ事ハ後述ノ反例デ解ル．(11)，(12)ヲ加ヘ平行四辺形則ニ到達スルガ(11)ハ満足セズ 他ハ満足シテ平行四辺形則ノ成立タヌ例．及(12)以外ヲ満タシ平行四辺形則ノ成立タヌ例及(9)ヲミタサヌ反例ガアゲラレル．最後ニ(11)以下ノ公理ト同等ノ公理ヲ二三考ヘテ見タ．之等ハ勿論(1)−(10)マデノ仮定ナシデハ同等デハ有リ得ナイ。公理系ノ整頓、其他検討スル余地ハ色々アルガ一応コノ辺デ纏メテ見タ．

以下ドイツ文字ハ Vektor，ギリシア文字ハ実数トスル．

公理系

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & \forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \quad \exists_1 \mathfrak{x} : \quad \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{x} = \mathfrak{b} \\ (2) & (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}) \\ (3) & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (4) & \forall \mathfrak{a}, \quad \forall \lambda \quad \exists_1 \mathfrak{x} : \quad \mathfrak{x} = \lambda \circ \mathfrak{a} \\ (5) & (\lambda\mu) \circ \mathfrak{a} = \lambda \circ (\mu \circ \mathfrak{a}) \\ (6) & \lambda \circ (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) = \lambda \circ \mathfrak{a} \oplus \lambda \circ \mathfrak{b} \\ (7) & (\lambda + \mu) \circ \mathfrak{a} = \lambda \circ \mathfrak{a} \oplus \mu \circ \mathfrak{a} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (8) & \mathfrak{o}_{\oplus} = \mathfrak{o} \quad (\text{但 } \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{o}_{\oplus} = \mathfrak{a} \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{o} = \mathfrak{a} \\ (9) & \lambda \circ \mathfrak{a} \oplus \mu \circ \mathfrak{a} = \lambda \circ \mathfrak{a} + \mu \circ \mathfrak{a} \\ (10) & \forall \mathfrak{a}, \quad \forall \lambda, \quad |\lambda| < |\lambda_0| \quad \exists \rho(\lambda_0, \mathfrak{a}) \quad (|\lambda| \text{ハ絶対値}) \end{array}\right.$$

$$|\lambda \circ \mathfrak{a}| < \rho \quad \left(|\ | \text{ハ Euklidische metrik ニヨル Vektor ノ長サ}\right)$$

(11) 少クトモ二ツノ一次独立(E^2, (+)ノイミデ)ナ $1\circ\mathfrak{a}$ 及 $1\circ\mathfrak{b}$ ガ存在スル．

(12) $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{a}'$ ガ(E^2, (+)ノイミデ) $\mathfrak{b}$ ニ関シ対称ナラバ $\exists\lambda \geq 0$

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \mathfrak{b}$$

(但 $\mathfrak{b}$ ハ $\mathfrak{a}$ 及 $\mathfrak{a}'$ ノ为交角ノ向(直交モ含ム)ノ Vektor)

最初(1)カラ(7)マデカラ 次ノ諸性質ガ得ラレル．

1° $0 \circ \mathfrak{a} = \mathfrak{o}_{\oplus}$

2° $(-1)\circ\mathfrak{a} = \ominus(1\circ\mathfrak{a})$ （但以下 $\ominus\mathfrak{a}$ ハ, $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{y} = \underset{\oplus}{0}$ ノ $\mathfrak{y}$ ヲ表ハス）

3° $1\circ\underset{\oplus}{0} = \underset{\oplus}{0}$

4° $(\lambda-\mu)\circ\mathfrak{a} = \lambda\circ\mathfrak{a}\oplus(\ominus(\mu\circ\mathfrak{a})) = \lambda\circ\mathfrak{a}\ominus\mu\circ\mathfrak{a}$（以下 $\mathfrak{b}\oplus\ominus\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{b}\ominus\mathfrak{a}$ トカク）

5° $1\circ\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$ ト以下書ク事ニスレバ公理(5)ノミカラ

$\bar{\bar{\mathfrak{a}}} = \bar{\mathfrak{a}}$ $\quad \alpha\circ\bar{\mathfrak{a}} = \overline{\alpha\circ\mathfrak{a}}$

更ニ公理8及9ヲ加ヘルト、

5° (i) $(-1)\circ\mathfrak{a} = -(1\circ\mathfrak{a})$

(ii) $(-\mu)\circ\mathfrak{a} = -(\mu\circ\mathfrak{a})$

及 7° $\lambda\circ\mathfrak{a}\ominus\mu\circ\mathfrak{a} = \underline{\lambda\circ\mathfrak{a}-\mu\circ\mathfrak{a}}$ ヲウル

Lemma 1 (i) （公理 (1)－(9) マデカラ）

P ヲ任意ノ rational number トスレバ

$p\circ\mathfrak{a} = p\cdot(1\circ\mathfrak{a}) = p\cdot\bar{\mathfrak{a}}$

Lemma 1 (ii) （公理 (1)－(10)）

α ヲ任意ノ real number トスレバ

$\alpha\circ\mathfrak{a} = \alpha\cdot\bar{\mathfrak{a}}$

証明ハ (i)ハ $p=0$ ノ時ハ 性質 1° カラ $p=$ integue >0 ノ時ハ 公理7及ビ(9) ヲ用ヒテ $p=\frac{m}{n}>0$ ノ時ハ $p=$ integere ノ時ノ結果ヲ使ヒ上. (ii)ハ矛盾法ヲ用ヒ (10) ノ條件ト矛盾ニ導ケバヨイ.

$\alpha<0$ ノ時ハ $\alpha=-\beta$ トオク.

Corollary 1 （公理 (1)－(10)）

$\lambda\cdot(\bar{\mathfrak{a}}\oplus\bar{\mathfrak{b}}) = \lambda\cdot\bar{\mathfrak{a}}\oplus\lambda\cdot\bar{\mathfrak{b}}$

又 $\lambda\cdot(\alpha\circ\mathfrak{a}\oplus\beta\circ\mathfrak{b}) = (\lambda\alpha)\circ\mathfrak{a}\oplus(\lambda\beta)\circ\mathfrak{b}$

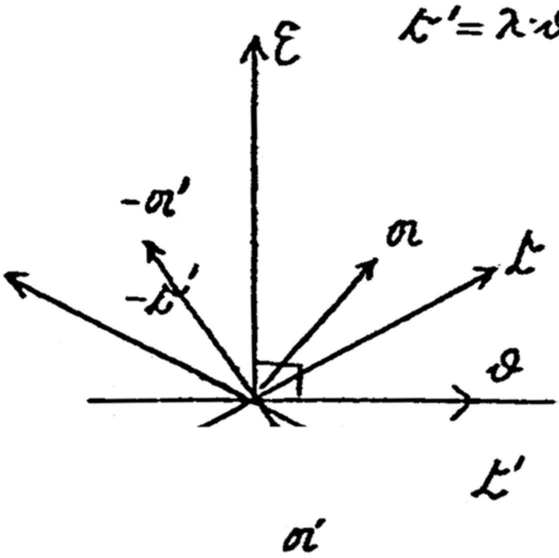
Corollary 2 （公理 (1)－(10)）

$(\lambda+\mu)\cdot\bar{\mathfrak{a}} = \lambda\,\bar{\mathfrak{a}} + \underline{\mu\cdot\bar{\mathfrak{a}}}$

Lemma 2 （公理 (1)－(12) 全部）（以下特ニ断ラヌ限リ公理全部ヲ仮定スル）

$\forall\mathfrak{a}.\ \exists\mathfrak{b}\quad \mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{b}}$

証 (11)ノ独立ナ Vektor ノ一ツヲ $\mathfrak{c}$ トシ他ヲ $\mathfrak{d}$ トシ $\mathfrak{d}$ ニ関シ $\mathfrak{c}$ ト対称ナ Vektor ヲ $\mathfrak{c}'$ デ表ハセバ



$$\mathfrak{b}' = \lambda\cdot\vartheta \ominus \mathfrak{b} = 1\circ(\lambda\cdot\vartheta_1, \ominus\mathfrak{b}_1) = \overline{\mathfrak{b}_1}$$

（但 $\vartheta = \overline{\vartheta_1}$，$\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{b}_1}$ トス）

$-\mathfrak{b}'$ ト $\mathfrak{b}$ トノ対称性ヲ用ヒ。

ϑ ニ直交スル ε モ同様 $\varepsilon = \overline{\varepsilon_1}$ ヲ得ル。

更ニ任意ニ $\mathfrak{a}$ ヲトレバ，$\mathfrak{a}', -\mathfrak{a}'$ ヲ上ト同様ニトリ，axiom (12) カラ得ル $\mathfrak{a}' \oplus -\mathfrak{a}' = 0$ ヲ用ヒ

$\mathfrak{a} = \lambda\varepsilon \oplus \mu\cdot\vartheta$ ト表ハサレテ

$\mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{a}_1}$ ヲ得ル。

Corollary 3. $1\circ\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

Corollary 4. $\lambda\circ\mathfrak{a} = \lambda\cdot\mathfrak{a}$

Corollary 5. $\ominus\mathfrak{a} = -\mathfrak{a}$

（之ハ axiom (12)・ノ直接ノ結果デアルガ (12) ヲ仮定シナクテモ Lemma 2，系3 ノドレカガ成立スレバ 之ト性質 2° トカラ得ラレル。

Lemma 3.

任意ノ $\mathfrak{a}$ ハ任意ノ直交セル一対ノ Vektor ノ linear Combination デ與ヘラレ，ソノ分解ハ Unique デアル。

（Lemma 2 ノ証明中ノ分解ハ $\vartheta = \overline{\vartheta_1}$，$\varepsilon = \overline{\varepsilon_1}$ ナル ϑ ト ε トニ関シテデアリ Lemma 2 乃至 系3 ノ成立後始メテ Lemma 3 ガ云ヘル。）

証明ハ Lemma 2 ノ証明法ト同様ニヤレバ良イ。

Uniqueness ハ 0 ノ分解ガ系5カラ Unique ナル事ヲ得テ解ル。

尚以下 $\lambda\circ\mathfrak{a} = \lambda\cdot\mathfrak{a}$ ヲ單ニ $\lambda\mathfrak{a}$ トカク事ニスル。

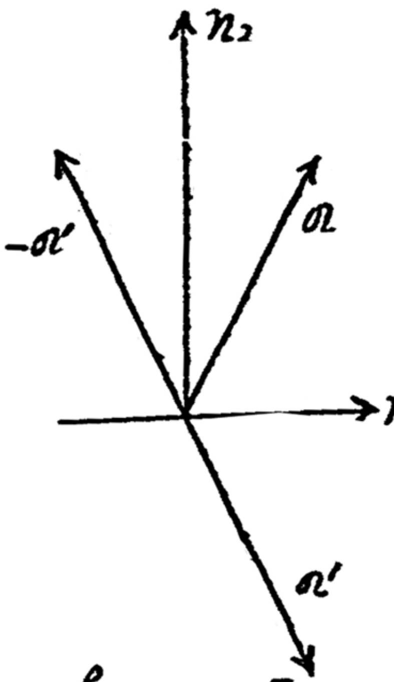
Lemma 4.

合成 $\oplus$ ハ任意ノ軸ニ関スル鏡像変換ニ対シテ不変．従ツテ合同変換ニ対シテ不変。

証。

1 $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{a}'$ ガ $\mathfrak{n}_1$ ニ関シ対称ナラバ，

$\mathfrak{a} = a_{11}\,\mathfrak{n}_1 \oplus a_{12}\,\mathfrak{n}_2$ トスレバ



$a' = a_{11} n_1 \oplus -a_{12} n_2$ トナル事ガ (B)
ヲ用ヒ、又之ノ分解ノ対称ニ対スル充分性ハ
Lemma 3 ノ Uniqueness カラ解ル。
2° 線像変換ノ軸トソレニ直交スル軸ヲトリ 1° ノ分解
ヲ適用スレバ Lemma ノ証明ハ容易ニ出来ル。

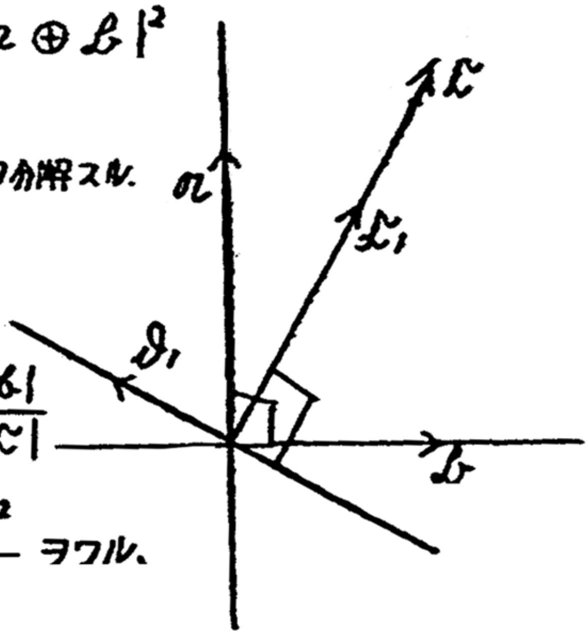
Corollary 6.

合成 $\oplus$ ハ相似変換ニ対シテ不変

Bew Lemma 4 及 Corollary 4 Corollary 1
カラ明カ.

Lemma 5

$a \perp b$ ナラバ $|a|^2 + |b|^2 = |a \oplus b|^2$



Bew
$$\left.\begin{aligned} a \oplus b &= c \\ a &= b_1 \oplus d_1 \\ b &= c_2 \oplus d_2 \end{aligned}\right\}$$ ト図ノ如ク分解スル.

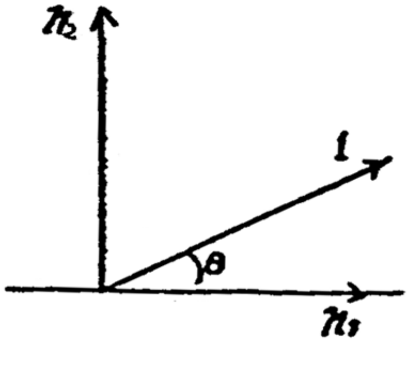
Corollary 6 カラ

$$\frac{|c_1|}{|a|} = \frac{|a|}{|c|} \qquad \frac{|c_2|}{|b|} = \frac{|b|}{|c|}$$

$$|c| = |c_1 + c_2| = \frac{|a|^2 + |b|^2}{|c|}$$ ヲワル.

Lemma 6

$|a| = 1$, n_1, n_2 ヲ任意ノ直交単位 Vektor トシテ a ト n_1 ト
ノ交点ヲ θ トスレバ



$$a = \cos\theta\, n_1 \oplus \sin\theta\, n_2.$$

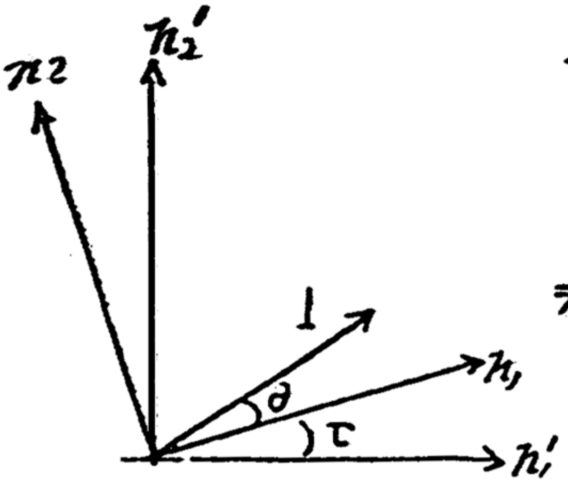
Bew Corollary 6 カラ

$$a = \varphi(\theta)\, n_1 \oplus \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) n_2$$

且 Lemma 5 カラ

$$\varphi^2(\theta) + \varphi^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1$$

次ニ n_1, n_2 ヲ C ダケ廻転 n_1', n_2' トシ.



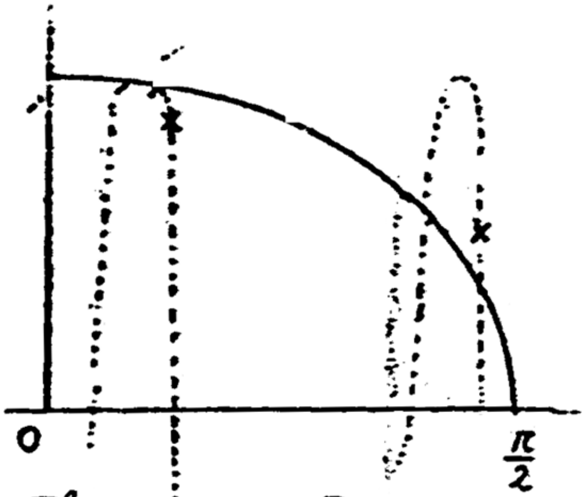
n_1'. n_2' ニ對スル分解ノ式カラ、

$$\varphi(\theta+\tau)=\varphi(\theta)\,\varphi(\tau)-\varphi(\tfrac{\pi}{2}-\theta)\,\varphi(\tfrac{\pi}{2}-\tau)$$

ヲ得. 又 $\varphi(0)=1$ ヲウル.

加法定理ノ *Special Case* トシテ半角ノ公式ガ得ラレルガ,

Axiom (12)。$\lambda\geqq 0$ カラ $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ デ $\varphi(\theta)\geqq 0$ デ 半角ノ+ *sign* ヲトル. $\frac{\pi}{2}$ ノ $\frac{m}{2^n}$ 倍ノ角ニ對シテハ $\varphi(\theta)=\cos\theta$ ヲ得テ *irra* $\times\frac{\pi}{2}$ ノ角ニ對シテハ矛盾法ヲ用ヒ $\lambda\geqq 0$ トノ矛盾ニ導ク.



以上述ベテ来タ事柄カラ主定理ハ明デアル.

Theorem ⊕ ハ平行四辺形則ヲミタス.

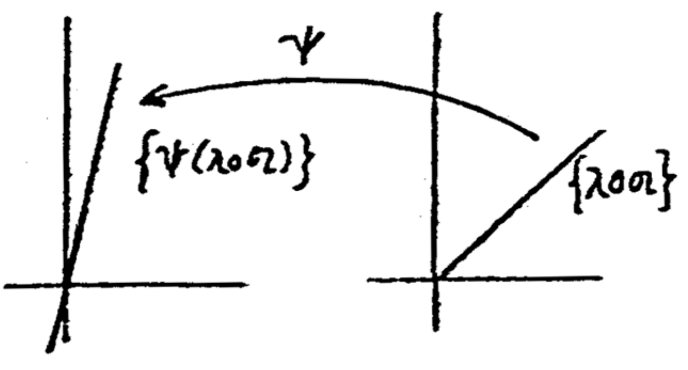
(a) (1)カラ(11)ヲミタシ(12)ヲミタサズ、平行四辺形則ヲミタサヌ反例

(寺阪先生ニヨル)

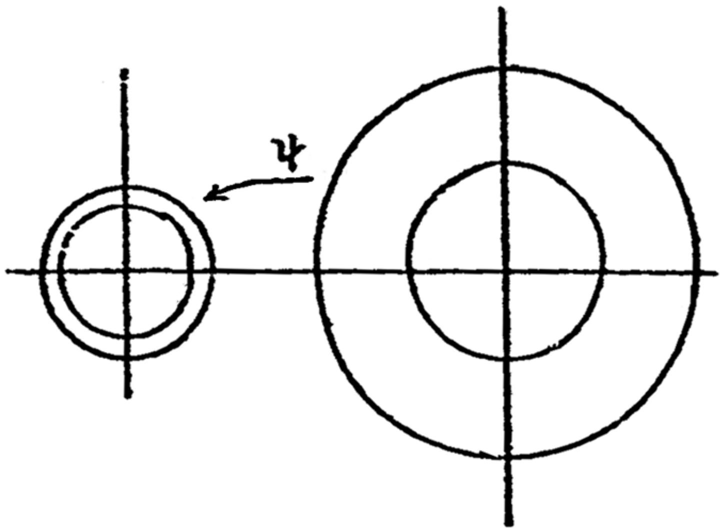
$(E^2,+)$ *Space* ノ直線上ノ位置ハソノマヽ直線相互ノ角ヲ変更スル. 但シ1対1ノコノ写像ヲψトシ

$$\begin{cases} a\oplus b=\psi(\psi^{-1}(a)+\psi^{-1}(b)) \\ \lambda\circ a=\lambda\cdot a \end{cases}$$

デ定義スル.



例2 (1)-(8)及(10)(11)(12)ヲミタシ(9)ヲミタサズ平行四辺形則ヲミタサヌ例.



射線間ノ角ハ不変放射状對稱ナ1對1ノ勝手ナ対應ヲ作ル、コノ寫像ヲΨトシ

$$\begin{cases} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \psi(\psi^{-1}(\mathfrak{a}) + \psi^{-1}(\mathfrak{b})) \\ \lambda \circ \mathfrak{a} = \psi(\lambda \cdot \psi^{-1}(\mathfrak{a})) \end{cases}$$

デ定義スル.

例3 (11) ノミ　ミタサズ　平行四辺形則ヲミタサヌ反例.

寫像ハ例2ノ寫像ヲ用ヒ.

$$\begin{cases} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \psi(\psi^{-1}(\mathfrak{a}) + \psi^{-1}(\mathfrak{b})) \\ \lambda \circ \mathfrak{a} \equiv 0 \end{cases}$$

デ定義スル.

例3　(11) ノミ　ミタサス平行四辺形則ヲミタサヌ反例. 寫像ハ例2ノ寫像ヲ用ヒ.

$$\begin{cases} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \psi(\psi(\psi^{-1}(\mathfrak{a}) + \varphi^{-1}(\mathfrak{b})) \\ \lambda \circ \mathfrak{a} \equiv 0 \end{cases}$$

デ定義スル.

次ニ (1)−(10) マデヲ仮定ノ上デ (11) 及ビ (12) ト同等ナ *axiom* ヲ考ヘテ見ル. (本ズノ *axiom* ヲ [I] トスル)

[II]

$$\begin{cases} (11)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \\ (12)' & (12) \text{ノ直角ノ場合ヲノゾキ.} \end{cases}$$

$$\exists\ \lambda > 0 \ : \ \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \circ \mathfrak{b}$$

[III]

$$\begin{cases} (11)' & \forall \mathfrak{a} \quad \exists \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{b}} \\ (12)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \circ \mathfrak{b} \end{cases}$$

[III]′

$$\begin{cases} (11)' & \forall \mathfrak{a},\ \exists \mathfrak{b},\ \mathfrak{a} = \overline{\mathfrak{b}} \\ (12)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \cdot \mathfrak{b} \end{cases}$$

[IV]

$$\begin{cases} (11)' & 1 \circ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \\ (12)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \cdot \mathfrak{b} \end{cases}$$

[IV]

$$\begin{cases} (11)' & 1 \circ \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \\ (12)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \circ \mathfrak{b} \end{cases}$$

aquivalent ノ証明ハ簡單ダガ [II] ニ関シテハ.

(12)'カラノ $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} = \lambda \circ \mathfrak{a}$ ト (11)'トデ $\mathfrak{a} = \alpha \circ \mathfrak{a}$

Lemma 2 ガミタサレタワケデアル.

未詳ノ事柄ハ

$$\begin{cases} (11)' & \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \\ (12)' & \exists \lambda > 0 \quad \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \cdot \mathfrak{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11)' = (11) \\ (12)' \ \exists \lambda \geq 0 \quad \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' = \lambda \circ \mathfrak{b} \end{cases}$$

及 $\begin{cases} (11)' = (11) \\ (12)'\ (12), \end{cases}$ $\lambda \geq 0$ ノ制限及 $\mathfrak{b}$ ノ向ニ関スル制限ヲトル.

ソノ代リニ (13)' $\mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{a}) = 0$ ヲ加ヘル.